MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CARAŞ-SEVERIN
Strada Ateneului 320112, Nr. 1, Reşița, Caraş-Severin, ROMÂNIA
Tel: 0255-214238; Fax: 0255-216042
E-mail: isjcaras@cs.ro; Web: http://www.cs.isj.edu.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2010 – FAZA LOCALĂ
13.02 2010

CLASA A X-A
PROFIL M1

1. a) Determinați partea întreagă a numărului $a = \log_2 5 + \log_5 8$;
b) Rezolvați ecuația: $(x-1)^{\log_3 5} = 1 + x.$

Prelucrare RMCS 26

2. Trei numere complexe a, b, c se numesc *frați* dacă $a + b + c = abc$. Arătați că :
a. există trei *frați* nenuli ;
b. dacă unul dintre *frați* este 0, atunci imaginile geometrice ale celor trei *frați* sunt puncte coliniare ;
c. cel puțin unul dintre *frați* are modulul strict mai mic decât 2 .

Prelucrare RMT 1/2009

3. Să se arate că :
a) nu există funcții strict monotone $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că
$$f(f(x)) = \{x\}\ ,\ \forall x \in [0,1];$$
b) nu există funcții injective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că
$$f(f(x)) = [x]\ ,\ \forall x \in \mathbb{R};$$
c) există funcții bijective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că
$$f(f(x)) = \frac{x+3}{4}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Prelucrare Gazeta Matematică

.

4. Să se determine cel mai mic număr natural *m* pentru care
$$\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3} \cdot \ldots \cdot \sqrt[2^n]{3} < m\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore
Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.